ローレンツ系のエントロピー減衰

日大理工　柳田達雄
日大原子力　島田一平

カオス力学系を特徴づける量として軌道の幾何学的構造を表すリヤプノフ数やＫ－Ｓエントロピーが調べられてきた。しかし、これらの量だけに着目しているかぎり力学系の確率構造の違いは十分には解らない。そこでエントロピー減衰なる概念を導入することにより、カオス力学系の確率的構造を理解するための手がかりとする。

Ｋ－Ｓエントロピーについてはよく知られているが、エントロピー減衰についてはあまり知られていない。そこで、エントロピー減衰なる概念をＫ－Ｓエントロピーの定義を振り返りながら、説明することにする。（§Ｉ～Ｖ）

エントロピー減衰に関しては、Ｐ.Ｓzépfalusy等[1]が絶対連続Ｌebesgue測度が存在する一次元写像に対し減衰の漸近的振舞いを議論している。また、Ｇrassbeger[2]等もエントロピー減衰率をeffective measure complexityなる量として導入し議論している。しかし、エントロピー減衰のこのような漸近的な振舞いだけではなく、減衰の仕方そのものに力学系の確率構造の情報が含まれている。我々の言うエントロピー減衰とは、この減衰の仕方である。

カオス力学系として最もよく知られているローレンツ系であるが、その軌道の振舞いの統計的性質について知られている事はあまり多くない。例えば、その時間相関関数減衰がべき的なのか、指数関数的なのかと言った事でさえ未解決の問題である。（講演者の一人は、以前、指数関数的であると言う予想を立てている。[3]）

ローレンツ系の力学変数を、１次元のＩsingスピンでコーディングする方法[3]を用いて、エントロピー減衰を観測することにより、ローレンツ系の統計的性質を理解するための手がかりとする。しかし、ローレンツ系に関しては、数値計算上の問題（演算時間）により完全な結果は得られていないので、現段階での予想を報告する。また、一次元写像のいくつかの臨界点近傍におけるエントロピー減衰についても報告する。

Ｉ　はじめに

一見複雑に見える現象がその変わり方の法則自体は時間が経っても変わらないことがある。そして、この複雑な現象は一定の確率法則にしたがって変わる。例えばコインを投げること、サイコロを振ること、与えられた容器のなかの粒子数を測定することを考えればいい。これらの確率構造は、過去と未来の両側無限に続く実験の系列$\Theta = \{\cdots, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \cdots\}$の空間$\Omega$上の確率測度Ｐによって記述される。重要なことは、各々の実験の結果が後の続く実験の結果に影響を与えるが、実験を支配する確率法則（有限次元の同時確率分布）は、時間が経過しても変わらないということである。すなわち、時間の経過を表す変換をＴとすれば、$P(\Phi) = P(T\Phi)$となるような変換を研究することである。

表面的には異なって見える変換が、実質的には同じ保測変換であることがある。例えば、状態空間の元を新しい記号で表しても変換は本質的には全く変わらない。このように本質的に同じ保測変換を同型と呼ぶ。

<u>定義　同型</u>

『　Tを確率空間（Ω,Ψ,P）上の保測変換、$\widetilde{T}$を確率空間（$\widetilde{\Omega},\widetilde{\Psi},\widetilde{P}$）上の保測変換とする。

それぞれ測度1の集合$\Omega_0\in\Psi$と$\widetilde{\Omega}_0\in\widetilde{\Psi}$及び$\Omega_0$から$\widetilde{\Omega}_0$の上への写像$\xi$が存在し、次の性質を持つとする。

1）写像ξは1対1である。

2）もし　$\Phi\subset\Omega_0$　かつ　$\widetilde{\Phi}\subset\xi\Phi$　ならば、　$\Phi\in\Psi$　のとき、そのときに限り　$\widetilde{\Phi}\in\widetilde{\Psi}$　であり、この場合$P(\Phi)=\widetilde{P}(\widetilde{\Phi})$

3）$\Omega_0\subset T^{-1}\Omega_0$　　（すなわち　$\Omega_0\supset T\Omega_0$）

$\widetilde{\Omega}_0\subset\widetilde{T}^{-1}\widetilde{\Omega}_0$　　（すなわち　$\widetilde{\Omega}_0\supset\widetilde{T}\widetilde{\Omega}_0$）

であり；最後にΩ_0のすべてのωに対して　$\xi T\omega=\widetilde{T}\xi\omega$

このようなΩ_0、$\widetilde{\Omega}_0$とξが存在する場合に、Tは$\widetilde{T}$に同型である　』

上の意味で、実質的な違いをみるために、その保測変換の軌道の統計的性質としてKolmogorov-Sinaiエントロピー(K－Sエントロピー)や、軌道の幾何学的構造を見るリヤプノフ数などが調べられてきた。

しかし、これらの定常的量だけに着目していては区別できないことがある。そこで、定常状態になるまでの過程、すなわちエントロピー減衰を見ることによって、今まで区別できなかった軌道の性質を見ることにする。

II．エントロピー

Tを（Ω,Ψ,P）上の保測変換とし，Φは、Ψの有限部分集合体を表す。そのとき有限部分集合体Φのエントロピーは、

$$H(\Phi)=-\sum P(\Phi)\,\mathrm{Log}\,[P(\Phi)]$$

によって定義される。ここで、和はΦの最小単位について取られる。有限集合体ΦのTに関するエントロピーは、

$$h(\Phi,T)=\lim_{n\to\infty}\sup\ n^{-1}\ H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}T^{-k}\Phi\right)$$

である。（この上極限は、実は本当の極限となることが証明される。）　最後に、保測変換Tのエントロピーは、

$$h(T)=\sup\ h(\Phi,T)$$

であり、上限はΨのすべての有限部分集合体Φについて取られる。

ここで、問題となるのは、上限の取り方、すなわちいかなる有限部分集合体Φを取るかである。この問題は、以下に示すKolmogorov－Sinaiの定理により解決される。

<u>Kolmogorov－Sinaiの定理</u>

『　Tが逆を持ち$\bigvee_{k=-\infty}^{\infty}T^{-k}\Phi=\Psi$であれば$h(T)=h(\Phi,T)$　』

または、可逆性の仮定なしに、$\bigvee_{k=0}^{\infty}T^{-k}\Phi=\Psi$であれば$h(T)=h(\Phi,T)$

従って、我々は保測変換をずらしとして表現するさいに、$\bigvee_{k=0}^{1} T^{-k}\Phi=\Psi$を満たす分割(generator)を選べばK－Sエントロピーを求めることができる。

Ⅲ．エントロピーと同型

具体的に与えられた２つの保測変換が、我々が定義した意味で、同じものであるかどうかを考える。例えば、Bernoulli変換(1/2,1/2)はBernoulli変換(1/3,1/3,1/3)に同型であるだろうか？

２つの変換が同型であることを証明するためには、適当な３つの組($\Omega_0,\tilde{\Omega}_0,\xi$)を構成する必要がある。２つの変換が同型でないことを証明するためには、適当な３つの組($\Omega_0,\tilde{\Omega}_0,\xi$)のあらゆる可能な選択を拒否することが必要である。

これを証明するのは、一般に容易ではない。そこで、不変量を用いて同型問題に対処する。　２つの保測変換は、もし一方が混合性を持ち他方が持たないのであれば同型でありえない事を証明することができる。このように混合性は１つの不変量であり、エルゴード性もまた１つの不変量である。

定義　混合性　　$\lim_{n\to\infty} P(A\cap T^{-n}B)=P(A)P(B)$

定義　エルゴード性　$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} I_A(T^k\omega)=P(A)$　　a.e

$I_A(\omega)=1\ (\omega\in A),\ 0\ (\omega\notin A)$

不変量によって区別される構造が多いほど、その不変量は役に立つ。もしそれが完全であれば最も良い。エルゴード性は、保測変換の間の完全な不変量ではない。共にエルゴード的な同型でない２つの変換が明らかに存在する。同じように、混合性も完全な不変量ではない。Bernoulli変換(1/2,1/2)とBernoulli変換(1/3,1/3,1/3)は共に混合的したがってエルゴード的であるから、エルゴード性と混合性はこれらを区別することはできない。この２つのBernoulli変換が同型であるかどうかはエントロピーを用いてKolmogorovにより解決された。

これをエントロピーの計算をまじえて考えてみる。まず、TがBernoulli変換ならば、

$$P\{\sigma_0 \mid \sigma_{-1},\ \sigma_{-2},\ \cdots,\ \sigma_{-n}\}=p(\sigma_0)$$

であるから、

$$h(T)=h(\Phi,T)=-\ \Sigma_i\ p(\sigma_i)\ \mathrm{Log}\,[p(\sigma_i)]$$

となる。Tを推移行列p_{ij}に対応するMarkov変換とする。このとき、$P\{\sigma_0 \mid \sigma_{-1},\ \sigma_{-2},\ \cdots,\ \sigma_{-n}\}=p(\sigma_0\sigma_{-1})$だから

$$h(T)=h(\Phi,T)=-\ \Sigma_{ij}\ p(\sigma_i\sigma_j)\ \mathrm{Log}\,[p(\sigma_i\sigma_j)]$$

となる。Bernoulli変換は、特別なMarkov変換であり、この場合には上の２つの式は一致する。２つのBernoulli変換、あるいは一般的に、２つのMarkov変換はエントロピー

が違えば同型ではない。例えば、Bernoulli変換(1/2,1/2)とBernoulli変換(1/3,1/3,1/3)は、それぞれエントロピーlog(2)とlog(3)を持つので同型ではない。

このように、エントロピーはエルゴード性や混合性では区別できない保測変換の構造を区別することができる。

Ⅳ. エントロピー減衰

有限集合体Φは、有限個の結果を持つ実験の役割を演じ、有限集合体$\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\Phi$は、$\Phi$に対応する実験のn個の繰り返し$\Phi$、$T^{-1}\Phi$，$T^{-2}\Phi\cdots T^{-(n-1)}\Phi$からなる複合実験に相当する。我々は、有限精度の観測装置で軌道を観測している。すなわち、装置は有限個の値$\Phi=\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m\}$を表示し、それぞれアルファベットを対応させると軌道は、$\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m\}$なるアルファベットの列として表現されることになる。従って、n回の複合実験によって得られるシンボル列$\Theta_n=\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$の結合確率を$P(\Theta_n)$で表せばn−サイトのエントロピーは

$$H(\Theta_n)=-\Sigma\ P(\Theta_n)\ \mathrm{Log}\,[P(\Theta_n)]$$

となる。サイト数の増加にともない、n−サイトのエントロピー$H(\Theta_n)$は増加する。そのときの増分$H(\Theta_{n+1})-H(\Theta_n)$を考えると、実はこれは条件付きエントロピーに等しいことが解る。

$$\begin{aligned}H(\Theta_{n+1})-H(\Theta_n)&=-\Sigma\ P(\Theta_n)\Sigma\ P(\sigma_{n+1}\mid\Theta_n)\ \mathrm{Log}\,[P(\sigma_{n+1}\mid\Theta_n)]\\&=H(\sigma_{n+1}\mid\Theta_n)\end{aligned}$$

条件付きエントロピーの意味は、最初のn回の実験の繰り返しによって得られたシンボル列Θ_nが与えられたとき、n＋1回目の実験の結果がなんであるかについての不確定性を表す量である。言い換えれば、最初のn回の実験の繰り返しによって得られた情報量に、さらにn＋1回目の実験によってつけ加えられる情報量である。$n^{-1}H(\Theta_n)$，$H(\sigma_{n+1}\mid\Theta_n)$はともに、非増加関数であり$n\to\infty$でK−Sエントロピーに収束する。これに対し、nサイトのエントロピー$H(\Theta_n)$は非減少関数であり$n\to\infty$でnに関し線形に増加する。我々が注目しているエントロピー減衰とは、サイト数n（実験回数）の増加にともないnサイトのエントロピー$H(\Theta_n)$の増分すなわち条件付きエントロピー$H(\sigma_{n+1}\mid\Theta_n)$が減衰して行く仕方の事である。すなわち、サイト数nの関数$f(n)=H(\sigma_{n+1}\mid\Theta_n)$-K.S を考えている。ここで$H(\sigma_{n+1}\mid\Theta_n)$もまた$n\to\infty$でK−Sエントロピーに収束する事を簡単に示す。

$$\begin{aligned}&H(\sigma_{n+1}\mid\Theta_n)\\&=-\Sigma\ P(\Theta_n)\Sigma\ P(\sigma_{n+1}\mid\Theta_n)\ \mathrm{Log}\,[P(\sigma_{n+1}\mid\Theta_n)]\\&=-\Sigma\ P(\Theta_n)\Sigma\ \{P(\sigma_{n+1}\cap\Theta_n)/P(\Theta_n)\}\ \mathrm{Log}\,[\{P(\sigma_{n+1}\cap\Theta_n)/P(\Theta_n)\}]\\&=-\Sigma\ P(\sigma_{n+1}\cap\Theta_n)\mathrm{Log}\,[P(\sigma_{n+1}\cap\Theta_n)]+\Sigma\ P(\Theta_n)\mathrm{Log}\,[P(\Theta_n)]\\&=H(\Theta_{n+1})-H(\Theta_n)\end{aligned}$$

nについて加えて

$$\sum_{i=1}^{n}H(\sigma_{i+1}\mid\Theta_i)=H(\Theta_{n+1})-H(\sigma_1)$$

ここで、左辺の$H(\sigma_{i+1}\mid\Theta_i)$はiについて非増加関数であるので、有限な極限値を持

つ。両辺をnでわり極限をとれば、

$$h=\lim_{n\to\infty} n^{-1}H(\Theta_n)=\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} H(\sigma_i \mid \Theta_{i-1})$$
$$=\lim_{n\to\infty} H(\sigma_n \mid \Theta_{n-1})$$

となりK－Sエントロピーに収束する。

V．Markov分割とエントロピー減衰

Sinaiは、推移的なAnosov微分同相写像[4]（およびAnosov型の流れ）に対して多様体の分割で、Markov分割と呼ばれる都合のよい性質を持った特殊な分割を構成した。
Markov分割の重要性は、もしMarkov分割が存在するならば、当の微分同相写像をMarkov型のずらしとして表現できることである。
Markov分割が存在する場合にはエントロピー減衰は、自明となる。すなわち、m重のMarkov変換を考えたとき、増分$H(\sigma_{n+1} \mid \Theta_n)$は$n>m$に対して一定値となる。

VI．数値実験

① 問題点

エントロピー減衰を観測するさいに、我々はコーディング方法として1次元Isingスピンを用いる。すなわち、有限部分集合体として$\Phi=\{\phi_1, \phi_2\}$を選び、各々にスピン1，－1を対応させるコーディング方法である。従って、$\bigvee_{k=0}^{1} T^{-k}\Phi$の最小単位は、$2^n$個の集合である。

数値実験で、エントロピー減衰を観測する場合、n＝20より大きなnに対する振舞いを調べるのは計算機の記憶容量の問題により今のところ困難である。このことにより、有限サイトのnでエントロピー減衰率を求める事ができるかという問題が生じる。この問題を解決するために、次の写像 $X_{n+1}=f_d(X_n)$ で実験してみる。

$$f_d(X)= [d+1-\sqrt{(d-1)+4d\,|\,1-2x\,|}\,]\,/2d$$

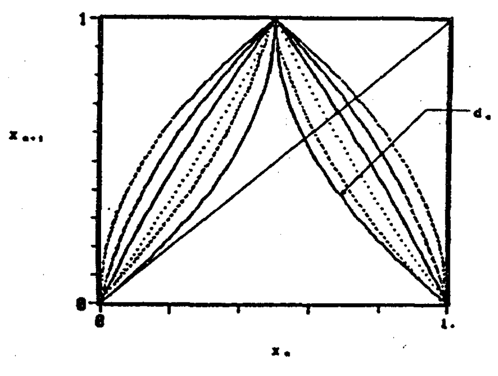

fig 1 ppmap

この写像は P.Szépfalusy，G.Györgyi によりエントロピー減衰率を絶対連続測度を用い正確な計算が行なわれている[1]ので数値スキームの手続きのチェックとなる。特徴として、写像は$d=d_c=1.0$の時$X=0.0$で$f(X)=X$に接し間欠的になる(fig 1)。我々は、この臨界点近傍について相関関数とエントロピー減衰を調べた結果

1） スピン－スピン相関関数

$$C(n)\equiv\lim_{m\to\infty} m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sigma_{i+n}\sigma_i$$

臨界点$(d=d_c)$において巾的な振舞いを見せ、臨界点からの距離 $\varepsilon=(d_c-d)/d_c$ が大きくなると、指数関数的振舞いを見せる(fig 2)。すなわち、臨界点近傍で

$$C(n)\sim \mathrm{const}\cdot\exp(-\lambda n)/n^{-r}$$

$$\lambda\sim\lambda_0\varepsilon+O(\varepsilon^2)\quad,\quad \lambda_0=0.4$$
$$r\sim r_0+O(\varepsilon)\quad,\quad r_0=0.7$$

なる振舞いを見せる。

2) エントロピー減衰

$$H(\sigma_{n+1} \mid \Theta_n) - K.S \sim const \cdot \exp(-\lambda n)$$

は、$d \to d_c$で$\lambda \to 0$となるはずであるが、数値実験結果はP.Szépfalusy等の結果と一致しない。これは、数値実験においてはエントロピー減衰率を、有限サイト(n=20)で求めようとしているためである。しかし、臨界点d_cより離れた領域ではよい精度で一致する。すなわち、臨界点近傍ではエントロピー減衰の漸近的振舞いを数値実験で求めることは困難であるが、臨界点から十分離れた領域では可能であることが解る。しかし、我々は漸近的振舞いのみに着目しているわけではなく、減衰の仕方、すなわちサイト数nの関数$f(n) = H(\sigma_{n+1} \mid \Theta_n) - K.S$を問題にしている。このとき、関数$f(n)$は非増加関数であり、相関関数のように振動することはない。(fig 3)

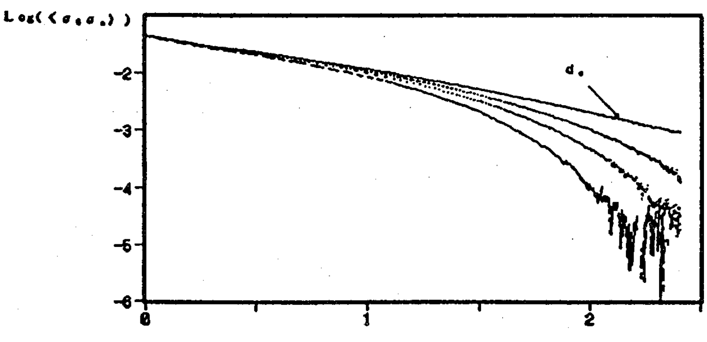

fig 2 ppmap スピンースピン相関関数の log-log plot 。d=dcでべき的減衰を示す。

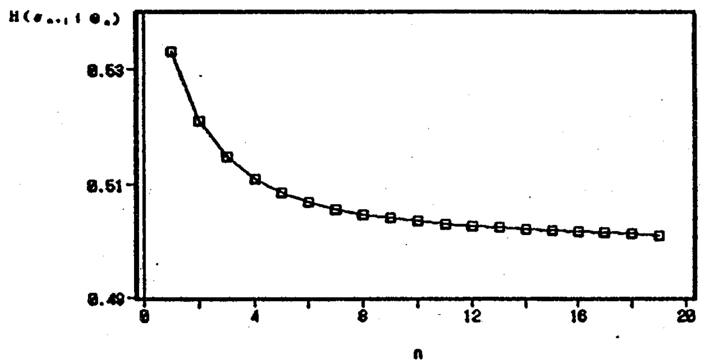

fig 3 ppmap d=dcでのエントロピー減衰

② ローレンツ系

ローレンツ系のスピンースピン相関関数は指数関数的振舞いを見せることが解った。従って、上の意味での臨界点から十分離れていることが予想され、サイト数n=20の制約問題は起こらない。従って、エントロピー減衰率を求めることが可能である。相関関数とエントロピー減衰をそれぞれ図に示す(fig 4,5)。統計平均の問題(計算機演算時間)により、nサイト当りのエントロピー自身が十分に収束していないことから、ローレンツ系のエントロピー減衰率を正確に示すことは現段階では困難である。しかし、統計平均増加にともない指数的減衰を示す傾向にある事がわかっている。

③ その他の臨界点でのエントロピー減衰

K−Sエントロピーはnサイトエントロピー$H(\Theta_n)$のnについて1次のオーダーでの発散の度合を表したものである。従って、1次よりも低次の発散はK−Sエントロピーには現われない。しかし、nサイトエントロピーが1次より低次で発散する場合がある。もちろんこの場合K−Sエントロピーは0であるので、K−Sエントロピーだけを観測していたのではこのような発散を見逃してしまう。しかも、これらは周期解やMarkov過程の場合において有限サイトでnサイトエントロピーが一定値となる場合とは明かに異

なる。このような発散の例が、Ｆeigenbaum固定点(fig 6)と準周期解である。これらのｎサイトエントロピー$H(\Theta_n)$はＬog的発散を示す。

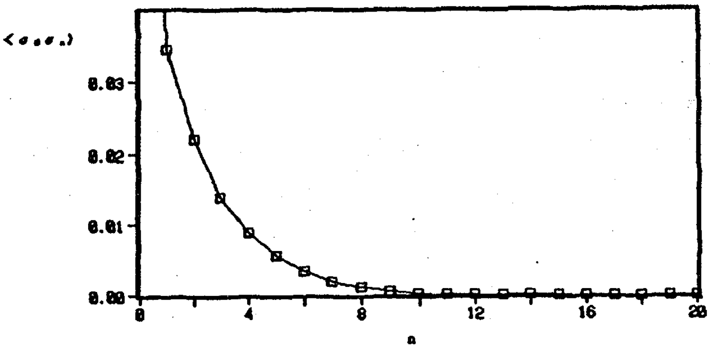

fig 4 ローレンツ系のスピン－スピン相関関数。指数関数的減衰を示す。

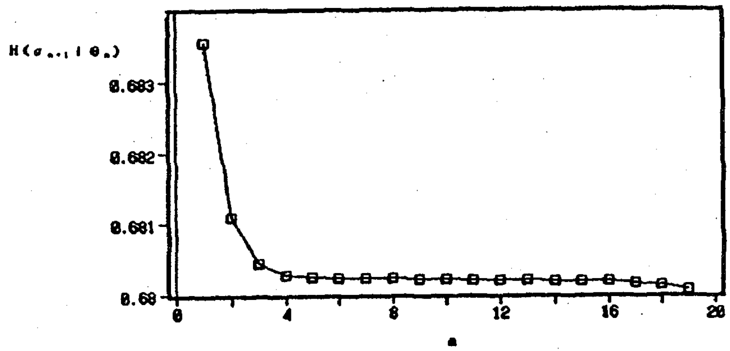

fig 5 ローレンツ系のエントロピー減衰指数関数的減衰を示す傾向にある。

Ⅶ．まとめ

Ｋ－Ｓエントロピーだけに着目していたのでは解らない力学系の確率構造をエントロピー減衰を導入することにより観測することができた。減衰の仕方によりいくつかのタイプに分類することができ以下のようになる。

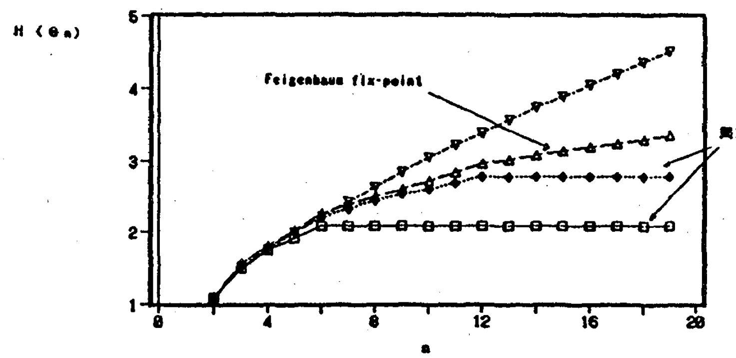

fig 6 Logistic写像のｎサイトエントロピーfeigengaum fix-pointでｌog的発散を示す。

１．Ｋ－Ｓエントロピー＝０

Ⓐ 周期運動の場合には、エントロピーはある有限のサイトn_0で定常状態となる。

$H(\Theta_n) = \mathrm{const} \quad (n > n_0)$

$H(\sigma_{n+1} | \Theta_n) = 0 \quad (n > n_0)$

Ⓑ 準周期運動の場合は、Ｋ－Ｓエントロピーは、周期運動と同じく０であるが、その減衰の仕方は$n \gg 1$　で巾的に振舞う。

$H(\Theta_n) = \log(n) \quad (n \gg 1)$

$H(\sigma_{n+1} | \Theta_n) = 1/n \quad (n \gg 1)$

２．Ｋ－Ｓエントロピー＞０

ｎサイトの情報量は

$H(\Theta_n) = (K.S) \times n \quad (n \gg 1)$

でｎに比例するが、その収束の仕方が指数的であるか巾的であるかによって

Ⓒ $H(\sigma_{n+1} | \Theta_n) - K\text{-}S = \mathrm{const} \cdot \exp(-\lambda n) \quad (n \gg 1)$

Ⓓ $H(\sigma_{n+1} | \Theta_n) - K\text{-}S = \mathrm{const} \cdot n^{-r} \quad (n \gg 1)$

Markov型では、有限サイトm_0で定常となる。

Ⓔ $H(\sigma_{n+1} | \Theta_n) - K\text{-}S = 0 \quad (n > m_0)$

定性的には、指数的減衰と巾的減衰がある。指数的減衰の場合、減衰率の逆数程度でMarkov型のずらしで近似することが可能であるが、巾的減衰の場合には、そのような特徴的長さがないことから、Markov近似ができない。

このように、同じ乱雑な過程でもその確率構造の複雑さは異なる。すなわち、K－Sエントロピーが同じでもMarkov近似ができる系とできない系がある。この二つの違いは、K－Sエントロピーだけに着目していたのでは区別することができない。我々は、エントロピー減衰を見ることにより、２つの定性的な確率構造の違いを見ることができる。この定性的な違いは、臨界点において観測される。すなわち、臨界点ではエントロピーは巾的減衰を示す事が解り、臨界点でのエントロピー減衰はスケール不変になる。従って、エントロピー減衰はカオス臨界点を理解する上の手がかりとなると考えられ、この観点からエントロピー減衰を考えることも重要な問題である。

エントロピー減衰のローレンツ系に関する現段階の結果は、指数関数的減衰を示す傾向にある。しかも減衰率が大きいことが予想され、ローレンツ系は３～５重Markov過程で近似可能である。このことから、ローレンツ系をMarkov過程近似で表現することにより、実際のローレンツ系の振舞い（相関関数など）を比較し考察することも今後の課題である。

K－Sエントロピーはサイト数ｎに対し１次の発散の度合を表す量であるが、これより低次の発散については何も語らない。すなわち、サイト数当りのエントロピーが発散するしないに関わらず、K－Sエントロピーは０となる。しかし、周期運動やMarkov過程のように有限サイトでサイト数当りのエントロピーが一定値になる系と、低次ではあるが発散する系では明かに異なる。このような発散は、周期運動→カオス転移の臨界点や、準周期運動で現われた。準周期運動については、分割方法の問題などもあり回転数が黄金比の準周期運動に特別な違いは現れていない。カオス転移の観点に立てば、これらにもエントロピー減衰に違いが現われると考えられるが、この点に関しては今後、明らかにしなければならない。

参考文献

1) P．Szépfalusy, G．Györgyi　Phys Rev 33(1986)2852
2) P．Grassberger, Physica 140A(1986)319
3) I．Shimada, Prog.Theor.Phys 62(1979)61
4) R．Bowen, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, Lecture Note in Mathematics470(Springer, Berlin)